AULA

35

Progressões geométricas

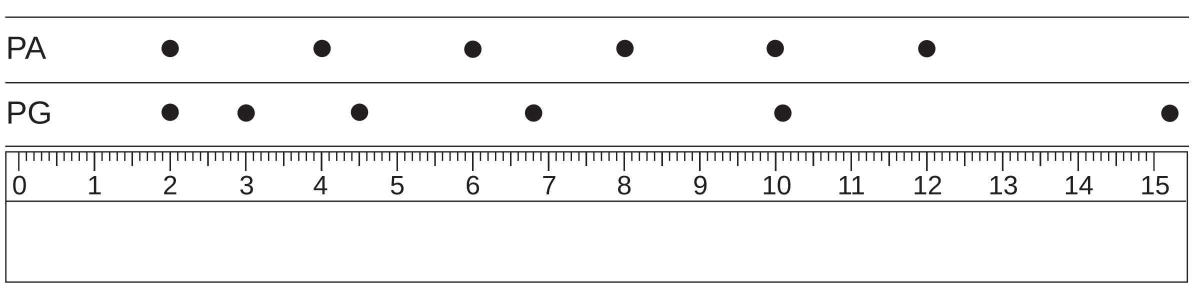
Introdução

Nesta aula, vamos abordar outra importante seqüência: a ***progressão geométrica***. É possível que você já tenha ouvido alguém preocupado com o número de habitantes do nosso planeta dizer a seguinte frase: “ *A produção de alimentos cresce em progressão aritmética enquanto a população mundial cresce em progressão geométrica*”.

O que essa frase significa?

A primeira parte da frase diz que o aumento da produção de alimentos é ***constante***, ou seja, a cada ano aumenta do mesmo valor. A segunda parte da frase fala de uma seqüência cujo crescimento é ***cada vez mais rápido***.

Para que você tenha uma primeira idéia do que vamos estudar, mostramos, no desenho seguinte, alguns termos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica, situados sobre uma régua. Observe o crescimento constante da progressão aritmética e o crescimento, ***cada vez mais rápido***, da progressão geométrica.



Nossa aula

Progressão geométrica (ou simplesmente **PG**) é uma seqüência de números não nulos em que cada um deles, ***multiplicado*** por um número fixo, fornece o próximo elemento da seqüência. Esse número fixo chama-se ***razão***, e os elementos da seqüência são os ***termos*** da progressão geométrica.

Por exemplo, vamos obter os termos de uma progressão geométrica de razão 2, partindo do número 3.

3 6 12 24 48 96 192 384 768 1.536...

x2 x2 x2 ´ 2 x2 x2 x2 x2 x2 x2...

Observe como o crescimento é rápido.

Os termos da progressão geométrica são representados, como em qualquer seqüência, por a_1, a_2, a_3, ... , a_n, e a razão será representada pela letra **q**. Assim, no exemplo anterior, temos $a_1=3$, $a_2=6$, $a_3=12$ etc. e $q = 2$.

Se cada termo da PG ***multiplicado*** pela razão dá o termo seguinte, então podemos afirmar que:

> ***A razão da PG é igual a qualquer termo dividido pelo anterior.***

No nosso estudo, vamos considerar apenas progressões geométricas de ***termos positivos***. São as que têm interesse prático e ocorrem em diversos fenômenos naturais.

Observe três exemplos que mostram a classificação das progressões geométricas:

- $a_1 = 2$, $q = 5$
  PG: 2, 10, 50, 250, 1.250, ...
  É uma progressão ***crescente***.
- $a_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$
  PG: $8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4} ...$
  É uma progressão ***decrescente***.
- $a_1 = 3$, $q = 1$
  PG: 3, 3, 3, 3, 3, 3, ...
  É uma progressão ***estacionária***.

Pelo que vimos acima, concluímos que, se a razão for maior que 1, a progressão geométrica é crescente e, se a razão for um número entre 0 e 1, a progressão é decrescente.

Vamos agora obter uma fórmula para determinar qualquer termo de uma PG a partir do primeiro termo e da razão. Observe então uma progressão geométrica qualquer:

$$a_1 \xrightarrow{\times q} a_2 \xrightarrow{\times q} a_3 \xrightarrow{\times q} a_4 \xrightarrow{\times q} a_5 \ ..... \ a_n$$

A partir da definição de PG, temos que $a_2 = a_1 \cdot q$.

O terceiro termo é $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$. O quarto termo é $a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$ e assim por diante.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_1 \cdot q^3 \\ a_5 &= a_1 \cdot q^4 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Para obter então o termo de ordem **n**, devemos multiplicar o primeiro termo pela razão n-1 vezes, ou seja,

Fórmula do termo geral

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

EXEMPLO 1

Determinar o 12º termo da PG 7, 14, 28, ...

Como a razão da PG é igual a qualquer termo dividido pelo anterior, temos que:

$$q = \frac{14}{7} = 2.$$

Para calcular o 12º termo dessa progressão, substituímos **n** por 12 na fórmula do termo geral. Temos então:

$$a_{12} = a_1 \cdot q^{11}$$

Substituindo os valores do primeiro termo e da razão, encontramos:

$$a_{12} = 7 \cdot 2^{11}$$
$$a_{12} = 7 \cdot 2.048 = 14.336$$

EXEMPLO 2

Existem bactérias que se reproduzem de forma extremamente rápida. Um exemplo é a bactéria que causa a sífilis (chamada *treponema pallidum*): cada uma delas se transforma em 8 iguais no período de 1 hora.
Se uma bactéria desse tipo começa a se reproduzir, quantas elas serão 12 horas depois, supondo que nenhuma delas tenha morrido?

Solução: A população de bactérias forma uma progressão geométrica:

momento inicial → $a_1 = 1$
1 hora depois → $a_2 = 8$
2 horas depois → $a_3 = 64$
....

Vemos então que, 12 horas depois, devemos calcular o 13º termo da progressão geométrica com $a_1 = 1$ e $q = 8$. Aplicando novamente a fórmula do termo geral, com $n = 13$, temos:

$$a_{13} = a_1 \cdot q^{12}$$

Substituindo os valores do primeiro termo e da razão, encontramos:

$$a_{13} = 1 \cdot 8^{12}$$

Esse resultado dá o incrível número **68.719.476.736**, ou seja, mais de 68 bilhões de bactérias!

A PG na calculadora

A maioria das calculadoras simples é capaz de mostrar no visor os termos de uma progressão geométrica de forma bastante prática. Basta digitar a razão, o sinal de multiplicação, o primeiro termo e a tecla [=] sucessivas vezes.

Os termos da PG vão aparecendo no visor:

				VISOR	
[q]	[x]	[a_1]	[=]	a_2	
			[=]	a_3	
			[=]	a_4	etc.

Por exemplo, para obter diversos termos da PG de razão 3 com primeiro termo 2, digite, nesta ordem:

[3] [x] [2] [=] [=] [=] [=] ...

Você verá então os seguintes números aparecerem no visor:

[6] [18] [54] [162] [486] [1.458] [4.374] [13.122]

EXEMPLO 3

João investiu R$ 500,00 em ações de uma empresa.
Por infelicidade, esse dinheiro sofreu desvalorização de 5% todos os meses.
Quanto João ainda tinha no fim de 1 ano?

Quem perde 5% fica com 95% do que tinha antes.

$$95\% = \frac{95}{100} = 0,95$$

Se ele tinha R$ 500,00, um mês depois passou a ter 500 . 0,95 = 475, ou seja, ele passou a ter apenas 95% do que tinha antes.
O raciocínio continua igual. Se ele agora tem R$ 475,00, no mês seguinte ele passará a ter 475 . 0,95 = 451,25, ou seja, apenas 95% do que tinha. Você observou então que:

Para desvalorizar uma quantia em 5%, devemos multiplicá-la por 0,95.

O dinheiro de João forma então uma progressão geométrica decrescente:

mês inicial	$\rightarrow$	$a_1 = 500$
1 mês depois	$\rightarrow$	$a_2 = 500 \,.\, 0,95$
2 meses depois	$\rightarrow$	$a_3 = 500 \,.\, 0,95^2$
....		
12 meses depois:	$\rightarrow$	$a_{13} = 500 \,.\, 0,95^{12}$

Para encontrar esse valor, use a máquina de calcular. Digite primeiro a razão (0,95), o sinal de multiplicação, o primeiro termo (500) e, em seguida, 12 vezes a tecla [=] .
No visor aparecerá o número 270,18. Isso quer dizer que os R$ 500,00 de João foram sendo desvalorizados em 5% a cada mês e, no fim de um ano, ficaram reduzidos a **R$ 270,18**.

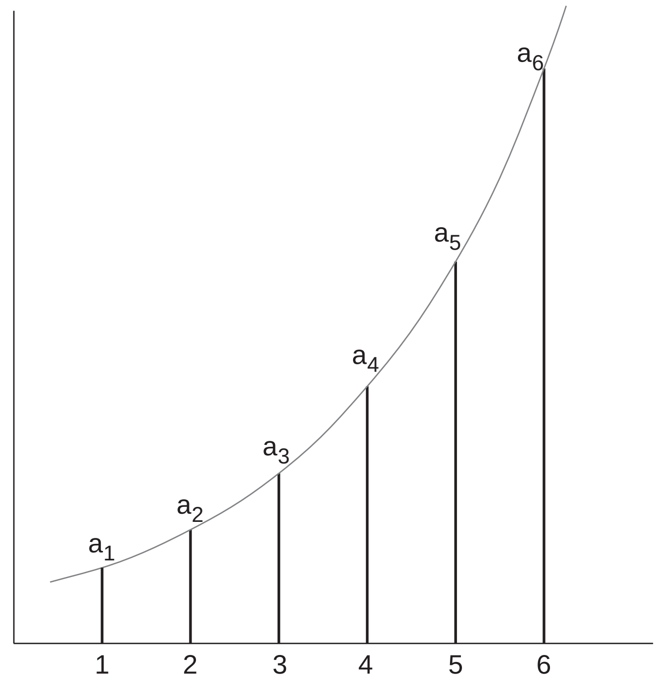
Propriedades da PG

O gráfico

Esse gráfico de barras representa a progressão geométrica cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é 1,5. O termo geral dessa PG é portanto:

$$a_n = 1 \cdot (1{,}5)^{n-1}$$

Repare que, na progressão aritmética (Aula 33), as extremidades das barras estão sobre uma reta. Na progressão geométrica, as extremidades das barras estão sobre uma curva. Essa curva, chamada ***curva exponencial***, será objeto de nosso estudo na Aula 58.



Progressão de três termos

Suponha inicialmente que os números **a**, **b**, **c**, formem uma progressão aritmética. Como a razão é igual a **b - a** e também igual a **c - b** temos:

$$b - a = \mathbf{c - b}$$
$$2b = a + c$$
$$\boxed{\mathbf{b = \frac{a + c}{2}}}$$

Dizemos então que **b** é a ***média aritmética*** entre **a** e **c**.

Agora, se os números positivos **a**, **b**, **c** formam uma progressão geométrica, então a razão é igual a **b/a** e também igual a **c/b**. Daí,

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$
$$b^2 = ac$$
$$\boxed{\mathbf{b = \sqrt{ac}}}$$

Dizemos então, nesse caso, que **b** é ***média geométrica*** entre **a** e **c**.

Observe duas progressões, uma aritmética e outra geométrica, ambas com três termos.

PA: 4, 10, 16, $\rightarrow$ 10 é média aritmética entre 4 e 16.

PG: 4, 8, 16, $\rightarrow$ 8 é média geométrica entre 4 e 16.

Exercícios

Exercício 1

Escreva os 8 primeiros termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é 5 e cuja razão é 2.

Exercício 2

Calcule o valor de **x** em cada uma das progressões geométricas abaixo:

a) 4, 12, **x**
b) 2, **x**, 50
c) **x**, 6, 9

Exercício 3

Uma pequena empresa está em desenvolvimento, e seu faturamento aumenta 20% todos os meses. Se em janeiro ela faturou R$ 7.400,00, quanto ela deverá faturar em outubro do mesmo ano?
Sugestão: Se o faturamento em certo mês é **x**, então no mês seguinte será 20% maior, ou seja,

$$x + \frac{20}{100} \cdot x = x + 0{,}2x = (1 + 0{,}2)\ x = 1{,}2x$$

Esse cálculo mostra que, para conhecer o faturamento do mês seguinte, basta ***multiplicar*** o faturamento atual por 1,2. Portanto, os faturamentos formam uma progressão geométrica de razão 1,2.

janeiro → $a_1 = 7.400$
fevereiro → $a_2 = 7.400 \cdot 1{,}2$
março → $a_3 = 7.400 \cdot 1{,}2^2$
....
outubro → $a_{10} = ?$

Use a máquina de calcular para determinar o faturamento de outubro.

Exercício 4

O número **x** é positivo e os números **8**, **x** e **x + 6** formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. Calcule **x**.

Exercício 5

Uma indústria começou a funcionar em 1980 e aumentou sua produção em 10% a cada ano. Em que ano a produção será, pela primeira vez, maior que o dobro da inicial?
Sugestão: Se a produção em certo ano é **x**, no ano seguinte será 10% maior, ou seja,

$$x + \frac{10}{100}\ x = x + 0{,}1x = (1 + 0{,}1)\ x = 1{,}1x$$

Então, para calcular a produção do ano seguinte, basta multiplicar a produção atual por 1,1.
Considere um valor qualquer para a produção inicial, por exemplo, 100. Construa uma PG de razão 1,1 e, com auxílio da máquina de calcular, verifique quando essa produção passará de 200.

Exercício 6

O protozoário chamado *plasmodium vivax* é um dos causadores da malária. Ele se reproduz muito rápido. No espaço de um dia, cada um deles se transforma em 4 iguais.

Se um deles penetra no organismo de uma pessoa, quantos eles serão (aproximadamente) 10 dias depois?

Exercício 7

A partir de 1970 a incidência de certa doença passou a diminuir de 40% a cada ano. Em que ano o número de doentes foi de cerca de 1% do número registrado em 1970?

Sugestão: Construa a progressão geométrica abaixo:

ANO	1970	1971	1972	1973	....
Nº DE DOENTES	100	60	36		

e, com auxílio da máquina de calcular, verifique em que ano aparece um número próximo de 1.