AULA

61

Resolvendo problemas com logaritmos

Introdução

Na aula anterior descobrimos as propriedades dos logaritmos e tivemos um primeiro contato com a tábua de logarítmos. Agora você deverá aplicar os conhecimentos adquiridos na solução de diversos problemas.

Vamos lembrar que quando escrevemos, por exemplo, log 2 = 0,301, significa que $10^{0,301} = 2$.

Usamos aqui sempre a base 10 e, por isso, os nossos logaritmos são chamados decimais. Existem também logaritmos em outras bases. Por exemplo, a igualdade $2^5 = 32$ significa que o logaritmo de 32 na base 2 é igual a 5. Como a teoria básica dos logaritmos é a mesma em qualquer base, continuaremos nosso estudo tratando apenas dos logaritmos decimais. São eles que aparecem nas tábuas dos livros didáticos e nas calculadoras científicas.

Nossa aula

Esta aula foi elaborada com problemas em que os logaritmos são necessários para a solução. Acompanhe o raciocínio com uma calculadora comum para conferir os cálculos e consulte a tábua de logaritmos da aula passada quando necessário.

EXEMPLO 1

Um juiz determinou o pagamento de uma indenização até certa data. Determinou também que, caso o pagamento não fosse feito, seria cobrada uma multa de R$ 2,00 que dobraria a cada dia de atraso. Em quantos dias de atraso essa multa seria superior a 1 milhão de reais?

Solução:

A multa determinada pelo juiz pode parecer pequena, se o atraso no pagamento for de poucos dias. Mas ela cresce com uma rapidez muito grande.

Chamando de **x** o número de dias de atraso no pagamento, o valor da dívida será 2^x. Veja:

1 dia de atraso $\Rightarrow$ x = 1 $\Rightarrow$ multa = $2^1 = 2$
2 dias de atraso $\Rightarrow$ x = 2 $\Rightarrow$ multa = $2 = 4$
3 dias de atraso $\Rightarrow$ x = 3 $\Rightarrow$ multa = $2 = 8$ e assim por diante.

Como vemos, as multas crescem em progressão geométrica. Devemos calcular em que dia essa multa atinge 1 milhão de reais, ou seja, devemos resolver a equação:

$$2^x = 1\ 000\ 000$$

Para resolver essa equação é preciso aplicar o logaritmo nos dois lados:

$$\log 2^x = \log 1\ 000\ 000$$

$$\log 2^x = \log 10^6$$

Agora vamos aplicar a propriedade do logaritmo da potência:

$$x \cdot \log 2 = 6 \cdot \log 10$$

Como log 10 = 1 e log 2 = 0,301 (veja a tabela), temos:

$$x \cdot 0{,}301 = 6$$

$$x = \frac{6}{0{,}301} = 19{,}93$$

Assim, concluímos que no 20º dia de atraso a multa terá passado de 1 milhão de reais.

Veja outro exemplo que necessita do cálculo pela tábua de logaritmos.

EXEMPLO 2

Se log x = 1,6395, determine x.

Solução:

Vamos recordar, inicialmente, que o logaritmo se constitui de duas partes: a ***característica*** e a ***mantissa***. A característica é o número que está antes da vírgula e a mantissa é o número que aparece depois da vírgula. A tábua de logaritmos apresentada na aula passada nos dá apenas as mantissas, mas a característica nos dá a seguinte informação:

NÚMEROS	CARACTERÍSTICA
entre 1 e 9	0
entre 10 e 99	1
entre 100 e 999	2
entre 1000 e 9999	3

Como log x = 1,6395 tem característica 1. Então, sabemos que o número **x** está entre 10 e 99. Assim, procuramos a mantissa 6395 na tábua.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522

Uma vez encontrada a mantissa, vemos que na coluna da esquerda está o número 43 e na linha de cima o número 6. Juntando esses números, formamos o número 436, faltando apenas colocar a vírgula no lugar certo. Como o nosso número está entre 10 e 99, então x = 43,6.

EXEMPLO 3

Um construtor deseja fazer um reservatório de água para conter 5000 litros e que tenha a forma de um cubo. Quanto deve medir o lado desse cubo?

Solução:

Um cubo é uma caixa que tem comprimento, largura e altura iguais.

O volume de uma caixa é o produto de suas dimensões: comprimento × largura × altura. Logo, se o lado do cubo mede **a** seu volume será **a · a · a = a** . Por outro lado, sabemos que 1m é igual a 1000 litros. Portanto, se essa caixa deve conter 5000 litros, seu volume será 5m . Devemos então resolver a equação:

$$a = 5$$

O valor de **a** será a medida em metros do lado desse cubo. Aplicando logaritmo dos dois lados e, em seguida, a propriedade da potência temos:

$$\log a = \log 5$$

$$3 \cdot \log a = \log 5$$

Na tábua de logaritmos encontramos log 5 = 0,699. Logo:

$$3 \cdot \log a = 0{,}699$$

$$3 \cdot \log a = \frac{0{,}699}{3}$$

$$\log a = 0{,}233$$

Como agora sabemos que o logaritmo de **a** é igual a 0,233, vamos procurar na tábua de logaritmos a mantissa 233.

Encontrando a mantissa 2330, verificamos que à esquerda existe o número 17 e acima o número 1. Juntando esses algarismos formamos o número 171. Falta apenas colocar a vírgula no lugar correto. Repare que calculamos log a = 0,233. Esse número possui característica 0, ou seja, o valor de **a** está entre 1 e 9. Portanto, o valor do lado do cubo é 1,71 m.

Dessa forma, o construtor saberá que construindo um reservatório de água com a forma de um cubo de 1,71 m de lado, ele terá a capacidade de conter 5000 litros de água.

EXEMPLO 4

Em certo país, a taxa de inflação é igual todos os meses, mas no final de um ano verificou-se que os preços dobraram. Qual é a taxa mensal de inflação nesse país?

Solução:

Suponhamos que a taxa mensal de inflação seja **i**. Se hoje um produto custa **x**, custará daqui a um mês x (1 + i). Dentro de dois meses custará $x\,(1+i)^2$ e assim por diante. No final de um ano, esse preço será $x\,(1+i)^{12}$. Como sabemos que o preço será também o dobro do valor inicial, temos a equação:

$$x\,(1+i)^{12} = 2x$$

ou

$$(1+i)^{12} = 2$$

Para calcular o valor da taxa **i**, aplicamos o logaritmo aos dois lados da nossa equação:

$$\begin{aligned} \log\,(1+i)^{12} &= \log 2 \\ 12 \cdot \log\,(1+i) &= 0{,}301 \\ \log\,(1+i) &= \frac{0{,}301}{12} \\ \log\,(1+i) &= 0{,}0251 \end{aligned}$$

Na tabela não encontramos a mantissa 0251, mas encontramos 0253 (que é um valor próximo). Com essa mantissa formamos o número 107. Como a característica é zero nosso número será 1,07, então:

$$\begin{aligned} \log\,(1+i) &= 0{,}0251 \\ 1 + i &= 1{,}07 \qquad \text{(aproximadamente)} \\ i &= 0{,}07 = 7\% \end{aligned}$$

Portanto, a inflação mensal que faz os preços dobrarem em um ano é de aproximadamente 7%.

EXEMPLO 5

Pela evaporação, um reservatório perde, em um mês, 10% da água que contém. Se não chover, em quanto tempo a água se reduzirá a um terço do que era no início?

Solução:

Vamos chamar de **x** a quantidade de água que temos no reservatório. Em um mês essa quantidade será $x - \frac{10}{100} x = x - 0,1 x = x \cdot 0,9$.

Em dois meses será $x \cdot 0,9^2$ e assim por diante. Logo, depois de **n** meses, a quantidade de água no reservatório será $x \cdot 0,9^n$. Desejamos então calcular **n** para que esse valor seja igual a $\frac{x}{3}$, ou seja, um terço do que era no início.

$$x \cdot 0,9^n = \frac{x}{3}$$

$$0,9^n = \frac{1}{3}$$

Para calcular **n** vamos aplicar o logaritmo nessa equação e usar as propriedades da potência e da razão.

$$\log 0,9^n = \log \frac{1}{3}$$

$$n \cdot \log 0,9 = \log \frac{1}{3}$$

$$n \cdot \log \frac{9}{10} = \log \frac{1}{3}$$

Veja que log 1 = 0, log 10 = 1, log 3 = 0,4771 e log 9 = 0,9542, como nos informa a tabela. Substituindo esses valores, temos:

$$n\,(0,9542 - 1) = 0 - 0,4771$$

$$n\,(-0,0458) = -0,4771$$

$$n = \frac{0,4771}{0,0458} = 10,42$$

Assim, temos 10 meses e uma fração (0,42) que é quase a metade.

Como $0,42 \cdot 30$ dias = 12, 6 dias, dizemos que em 10 meses e 13 dias a água do reservatório terá se reduzido a um terço do que era no início.

Exercício 1.

Determine **x** em cada um dos casos:

a) $\log x = 2{,}7348$
b) $\log x = 1{,}7348$
c) $\log x = 0{,}7348$

Exercício 2.

Determine os logaritmos:

a) $\log 192$
b) $\log 68{,}4$

Exercício 3.

A população de um país cresce 5% a cada ano. Em quantos anos ela ficará duas vezes maior?

Exercício 4.

Quanto mede o lado de um cubo de 40 m de volume?

Exercício 5.

Em certo país, a inflação é a mesma todos os meses, atingindo 76% em 5 meses. Qual é a inflação mensal?

Exercício 6.

Encontre o valor de **x** em cada uma das equações:

a) $\log x = \log 4$
b) $\log x = \log 3 + \log 5$
c) $\log (x - 3) + \log 2 = 1$

Sugestão: substitua 1 por log 10, e aplique do lado esquerdo a propriedade da adição.

d) $\log (5\boldsymbol{x} + 10) - \log \boldsymbol{x} = 2$

Exercício 7.

Num certo dia, a temperatura ambiente era de 30ºC. Sobre um fogão havia uma panela com água fervendo e, em certo momento, o fogo foi apagado. A partir das informações que daremos a seguir, calcule que temperatura terá essa água 10 minutos depois que o fogo foi apagado.
Informações: A temperatura da água que se resfria obedece à seguinte equação:

$t - a = (b - a) \cdot 10^{-0{,}06\,n}$

Os significados das letras são os seguintes:

n = tempo de resfriamento em minutos.
a = temperatura do ambiente.
b = temperatura da água no início.
t = temperatura da água após o tempo de resfriamento.

Substitua os valores dados na equação: a = 30, b = 100 e n = 10. Aplique o logaritmo para calcular a temperatura da água.