AULA

19

O Teorema de Pitágoras

Introdução

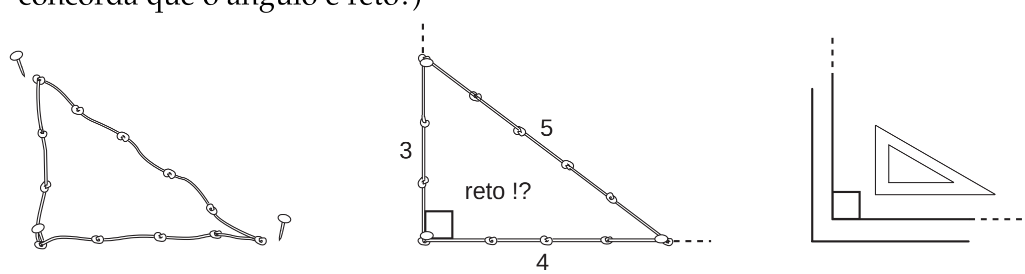
Sem dúvida, *"O Teorema de Pitágoras!"* é a resposta mais freqüente que as pessoas dão quando perguntamos do que elas se lembram das aulas de Matemática. E quando questionamos se elas sabem o que o teorema diz, muitas respondem: *"Não lembro ao certo, mas falava da hipotenusa e dos catetos... o quadrado da hipotenusa..."*

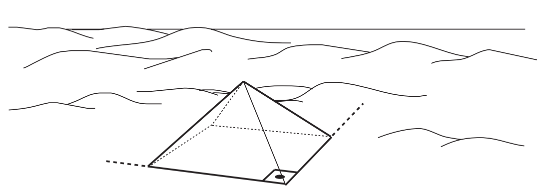
Estas palavras a gente não esquece: ***Teorema de Pitágoras, hipotenusa, catetos***. Alguns, no entanto, já não se lembram mais do enunciado do Teorema de Pitágoras. Mas nós acreditamos que, depois da aula de hoje, mesmo que você também não se lembre, ainda assim saberá como deduzi-lo novamente.

Vamos mostrar na página 143 uma figura muito simples e reveladora que os chineses já conheciam há muito tempo, antes mesmo de Pitágoras, e que nos permite deduzir o teorema. Essa figura você não esquecerá, principalmente se você a fizer com recortes de papel ou mesmo blocos de madeira. A beleza do teorema compensa o esforço desse trabalho extra.

Antes de começarmos nossa aula, aqui está uma aplicação prática e interessante deste famoso teorema para que você possa refletir a respeito.

Alguns povos antigos usavam um instrumento muito simples e prático para obter ângulos retos: uma corda. Nela faziam nós a distâncias iguais e, então, marcavam três nós a distâncias de três, quatro e cinco nós entre si, conforme mostra a ilustração, juntando depois o primeiro ao último nó. Quando esticavam esta corda, fixando-a nos três nós marcados, obtinham um triângulo... retângulo! Será mesmo reto o ângulo maior do triângulo 3, 4 e 5? (Faça o experimento e meça o ângulo maior do triângulo com seu esquadro ou transferidor. Você concorda que o ângulo é reto?)





Nossa aula

Quem foi Pitágoras de Samos

Seria impossível resumir a vida e as idéias de Pitágoras apenas em alguns parágrafos, tal é a multiplicidade de aspectos que apresenta. Sem falar no mistério que envolve sua figura. Acredita-se que tenha nascido em Samos (Grécia antiga) por volta de 558 a.C., e tenha vivido até os 99 anos, embora esses dados não sejam exatos. Desse véu de mistério o que emerge é o Pitágoras filósofo, matemático e músico. Buscou sabedoria em toda parte, até mesmo quando esteve preso na Babilônia. Um de seus mestres foi Tales de Mileto (que acabamos de conhecer na Aula 17), que o teria aconselhado a visitar o Egito, onde não só estudou geometria, como seu mestre, mas também aprendeu a ler hieróglifos (a escrita egípcia) com os próprios sacerdotes egípcios. E mais ainda: parece ter sido iniciado nos mistérios da religião egípcia.

Outros aspectos interessantes da vida de Pitágoras dizem respeito a algumas idéias bastante avançadas para sua época. Por exemplo: dizem que era vegetariano e um forte defensor da vida em geral, tendo-se declarado contrário ao sacrifício de animais, muito comum em sua época. Como seu contemporâneo distante Buda, acreditava que todos os seres humanos eram iguais e mereciam a liberdade; seria este o motivo pelo qual teria libertado seu escravo Zalmoxis. Pitágoras e os pitagóricos, alunos da escola que fundou, eram conhecidos amantes da liberdade.

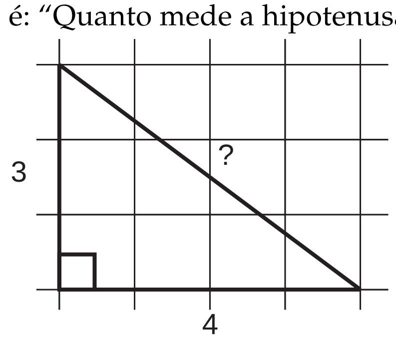
Se você está atento ao que dissemos, deve ter ficado intrigado: "*Por que chamamos Teorema de Pitágoras, se os chineses já conheciam o teorema muito antes dele?*"

Você não deixa de ter razão. Na verdade é muito comum que um teorema receba o nome de alguém que não tenha sido o primeiro a demonstrá-lo. Mas o mérito de Pitágoras não é menor, pois foi o responsável por ter aprendido a pensar a geometria de maneira abstrata, e não em relação a objetos concretos, como se fazia até então. Espírito científico, Pitágoras afirmava: "*A fórmula da hipotenusa em relação aos catetos é verdadeira não apenas em triângulos retângulos de lajotas ou aqueles desenhados na lousa, mas também para todos os triângulos retângulos que ainda não vimos, e mais ainda, para qualquer triângulo retângulo que pensemos*".

"*Mas, afinal, o que é o Teorema de Pitágoras?*", você deve estar se perguntando. Vamos a ele!

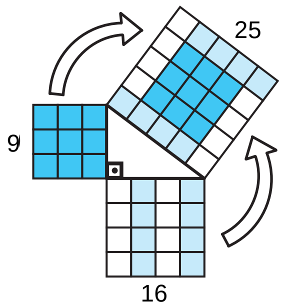
O Teorema de Pitágoras

Vamos trabalhar um pouco com as mãos. Pegue um papel quadriculado e desenhe um triângulo retângulo de 3 cm na vertical e 4 cm na horizontal. Sabemos que este triângulo é um triângulo retângulo, porque seus lados (catetos) estão em direções perpendiculares (horizontal e vertical). A pergunta para você é: "Quanto mede a hipotenusa desse triângulo?"



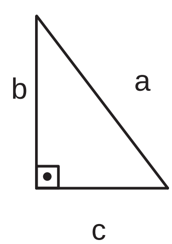
Você deve ter encontrado 5 cm para a medida da hipotenusa. Será mesmo? Será que a geometria pode provar que a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 3 e 4 cm mede 5 cm?

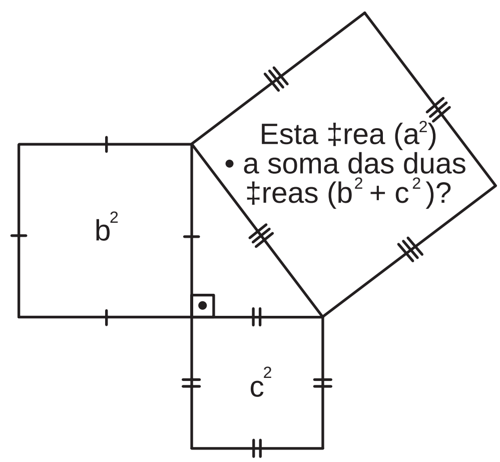
" O que há de especial em medir 5 cm e não 5,1 ou 4,9?" , alguém poderia perguntar. Pois veja o que acontece se os lados forem iguais a 3, 4 e 5 cm. Se construírmos um quadrado com cada um dos três lados, então teremos o triângulo retângulo cercado por três quadrados. O que podemos dizer sobre as áreas destes três quadrados?



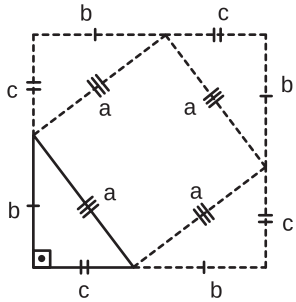
área do quadrado de um cateto		área do quadrado do outro cateto		área do quadrado da hipotenusa (se 5 estiver certo)
↓		↓		↓
3^2		4^2		5^2
↓		↓		↓
9	+	16	=	25

O que Pitágoras se perguntou foi: *" Será que não apenas neste, mas em todo triângulo retângulo* ***o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos****?"* E obteve a resposta: *" Sim, em qualquer triângulo retângulo..."* . E para que você veja logo como isso é bem simples, olhe para a figura abaixo.





O que queremos demonstrar é que, se a hipotenusa de um triângulo retângulo é **a** e seus catetos são **b** e **c**, então **a** = **b** + **c** . Vamos começar desenhando o quadrado de lado **a**. Brincando com outras peças iguais a estas em papel ou papelão, vemos algo interessante: quatro cópias do triângulo retângulo colocadas em torno do quadrado formam um novo quadrado de lado **b + c**. O que nos dizem as áreas das figuras abaixo?



área do quadrado de lado b + c	área do quadrado de lado a	4 · (área do triângulo)
↓	↓	↓
$(b + c)^2$	a^2	$4 \cdot \frac{bc}{2}$

Logo: b + $\cancel{2bc}$ + c = a + $\cancel{2bc}$
b + c = a (C.Q.D.)

Muito engenhosa essa figura dos chineses que usamos para comprovar o teorema, não é? Assim, está provado o Teorema de Pitágoras:

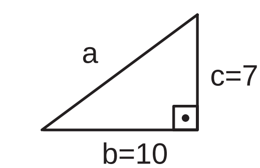
Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

Exercício 1

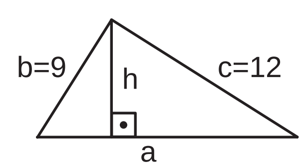
Em cada item abaixo temos um triângulo retângulo com hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**. Calcule o lado ou altura que se pede (nas mesmas unidades):

a) a = 10
b = 6
c = ? (Faça a figura. Meça e confirme com o Teorema de Pitágoras.)

b) a = ? (Use a calculadora, no teorema. Meça e confirme.)

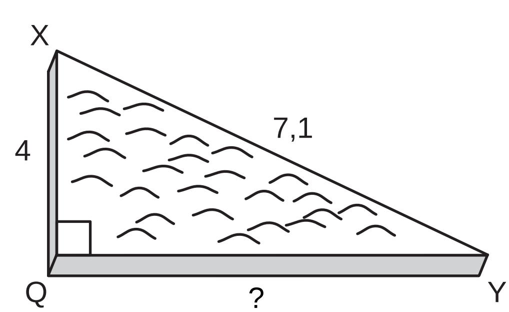


c) a = ?
h = ?
(Faça uso novamente do teorema. Depois, pense na área do triângulo para achar **h**. Meça e confirme.)



Exercício 2

Seu Raimundo precisa encomendar lajotas de mármore com o formato que está na figura abaixo. Ele observou que duas delas juntas formam um retângulo. Quanto mede o outro lado do retângulo?



Resolvendo o exercício

Em se tratando de calcular comprimentos nossa atitude natural é procurar por triângulos semelhantes e aplicar a regra de três como vimos na aula 17 e veremos novamente na aula 21. Quando esses comprimentos são lados de um triângulo retângulo, então a outra idéia que logo nos ocorre é aplicar o Teorema de Pitágoras. Temos:

a) $a = b + c$
$10 = 6 + c$; $c = 100 - 36 = 64$. Logo, **c = 8 cm**.

b) $a = b + c$
$a = 10 + 7 = 149$. Logo, **a = 12,2 cm**.

c) $a = b + c$
$a = 9 + 12 = 81 + 144 = 225$. Logo, **a = 15 cm**.

E para achar **h**? Observamos que a área do triângulo pode ser calculada de dois modos (pelo menos), usando a mesma fórmula:

$$A_{triang} = \frac{base \times altura}{2}$$

- com base = c = 12 e altura = b = 9: $A_{triang} = \frac{9 \times 12}{2} = 54$
- com base = a = 15 e altura = h: $A_{triang} = \frac{ah}{2} =$ (figura anterior)

$$= \frac{15h}{2}$$

$$= \frac{15h}{2} = 54.$$ Logo h @7,3 cm

Seu Raimundo também deve usar o Teorema de Pitágoras: num triângulo retângulo, $a = b + c$ - considerando:

a = XY = 11,3	Assim:	$(7,1) = 4 + QY^2$
b = QY = 4		$50,41 = 16 + QY^2$
c = QY = ?		$QY^2 = 34,41$ e QY

A recíproca do Teorema de Pitágoras

Sebastião é um operário muito atento ao trabalho e um aluno igualmente atento de 2º grau. Quando o professor terminou de demonstrar o Teorema de Pitágoras e de dar exemplos sobre ele, Sebastião pediu a palavra: *"Professor, o teorema está provado e os exemplos nos mostram que ele tem inúmeras aplicações,* *tanto na Matemática quanto no aspecto que mais nos interessa da nossa vida profissional, quero dizer, como pedreiros, marceneiros etc”* .

E prosseguiu ele: *“Mas nós ainda não resolvemos o problema. O Teorema de Pitágoras nos afirma que:* ***se*** *o ângulo entre os lados* ***b*** *e* ***c*** *for reto, então* ***a = b + c*** *. Agora, nossa questão é precisamente demonstrar que o ângulo é reto, sabendo que* ***a = b + c*** *para* ***a = 5, b = 3*** *e* ***c = 4****. Isto é exatamente a recíproca do Teorema de Pitágoras?”*

De fato, é muito freqüente, na vida cotidiana, encontrarmos uma pessoa confundindo as afirmações com suas recíprocas. Você se lembra de algum caso assim?

Uma prova da recíproca do teorema

Método socrático
Em homenagem ao grande sábio grego Sócrates (469 a.C., 399 a.C).

O professor de Sebastião precisou então de mais alguns argumentos para concluir com exatidão que, de fato, o triângulo de lados que medem 3, 4 e 5 cm, tão usado pelos antigos e tão prático até hoje tem mesmo um ângulo reto. A demonstração a princípio intrigou o nosso amigo Sebastião, mas depois de refletir em casa ele a aceitou. O professor usou o que se chama de ***método socrático***. Ele fez perguntas ao aluno que o levaram à conclusão verdadeira. O professor e o aluno tiveram o seguinte diálogo:

Professor - O que estamos querendo provar, Sebastião?

Sebastião - Que se os lados do triângulo medem **3**, **4** e **5** cm, ***então*** o ângulo entre os lados de **3** e **4** cm é um ângulo reto.

P - Muito bem; você inclusive separou a parte da afirmação que começa com “se” (a ***hipótese***) da parte que começa com “então” (a ***tese***). Excelente. Diga-me agora: você já viu algum triângulo com lados 3, 4 e 5 cm?

S - Vi, no início da aula nós o desenhamos em papel quadriculado para ajudar a resolver o roblema.

P - Isso mesmo. Mas não havia uma dúvida lá a respeito da medida, se seria mesmo 5 ou 5,1 cm...

S - Sim, mas depois o senhor nos ensinou o Teorema de Pitágoras; se o ângulo é reto, então **a = b + c** . Logo, para **b = 3** e **c = 4** vimos que **a = 5**.

P - Então você viu mesmo um triângulo de lados **3**, **4** e **5** cm: onde de fato, os lados que medem **3** e **4** cm fazem um ângulo reto. Agora diga-me: Quantos triângulos de lados **3**, **4** e **5** cm podemos ter?

S - Ora, professor, isso eu vi quando desenhei o triângulo **ABC** de lados **a = BC = 5**, **b = AC = 3** e **c = AB = 4** (cm). Comecei pelos pontos A e B. (Figura) Então pensei: se **AC = 3**, então **C** dista 3 cm de A e tracei com o compasso um círculo de centro **A** e raio 3 cm. E como **C** dista 5 cm de **B**, então **C** também deve estar sobre um círculo de centro **B** e raio 5 cm.

P - Portanto, quantos triângulos de lados **3**, **4** e **5** cm existem?

S - Dois, mas que de fato são iguais; um é o reflexo do outro num "espelho horizontal", o lado **AB**.

P - E quanto mede o ângulo entre os lados de **3** e **4** cm, nesse triângulo?

S - Bem, o triângulo que vimos antes...

P - É o único que vimos com estas medidas, não é? Continue.

S - Sim, ele tem ângulo reto.

P - Pode haver algum triângulo com estes lados cujo ângulo não seja reto?

S - Não, professor: se um triângulo tem lados **3**, **4** e **5** cm, então ele é um triângulo retângulo, pois só há um triângulo com estes lados e ele é retângulo!

Na aula seguinte, Sebastião foi direto ao professor: "A recíproca do Teorema de Pitágoras que o senhor me provou ser verdadeira, no caso do triângulo de lados **3**, **4** e **5** cm, é verdadeira não só para este, mas para qualquer triângulo de lados **a**, **b** e **c** em que **a = b + c** !"

E Sebastião exibiu, então, seu raciocínio abstrato, herança de mestres como Tales e Pitágoras: "A mesma figura que nos ajudou a raciocinar anteriormente também nos mostra que há apenas um triângulo (a menos de reflexão no espelho) em que os lados medem **a**, **b** e **c**. Suponha que em nosso triângulo **a = b + c** , qual é, então, o ângulo entre **b** e **c**?

E concluiu em seguida: "Como no triângulo retângulo **a = b + c** e só existe um triângulo de lados **a**, **b** e **c** em que **a = b + c** , então indiretamente concluímos que o ângulo entre **b** e **c** só pode ser um ângulo reto!"

"Raciocínio perfeito, Sebastião! Continue a desenvolvê-lo. Às vezes a mais preciosa lição de uma aula de matemática não se refere a números ou triângulos, mas a uma maneira criativa de pensar."

Nós concordamos. E esperamos que você, aluno ou aluna deste Telecurso, esteja também atento à precisão e à pureza do raciocínio matemático. Hora de praticá-lo, então, nos exercícios de hoje!

Exercícios finais

Exercício 3

Em cada um destes itens, calcule o terceiro lado do triângulo; desenhe o triângulo e confirme. Todas as medidas estão em cm:

a) a = 17
b = 15

b) b = 10
c = 10

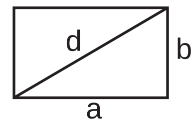
c) a = 12, 1
c = 6

Exercício 4

a) Quanto mede a diagonal do piso de uma sala retangular de 3×4 m?

b) Qual o tamanho máximo que pode ter um pau de cortina que se quer guardar deitado no chão de uma sala de 3×4 m?

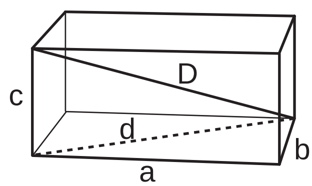
c) Seja **d** a diagonal de um retângulo de lados **a** e **b**, encontre uma fórmula que calcule **d** a partir de **a** e **b**.



Exercício 5

a) Qual o tamanho máximo que pode ter um pau de cortina que se deseja guardar provisoriamente num quarto de 3 x 4 m e altura 3 m?

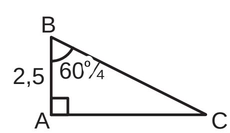
b) Seja **D** a diagonal interna de um paralelepípedo de lados **a**, **b** e **c**, calcule **D**.



Sugestão: Traçando a diagonal **d** da base retangular vemos que **c** e **d** são perpendiculares pois **c** é vertical e **d** é horizontal. Logo, o triângulo de lados **c**, **d** e **D** é retângulo.

Exercício 6

Um triângulo retângulo **ABC** tem $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ e **AB = 2,5 cm**:



a) Calcule a hipotenusa **BC**.

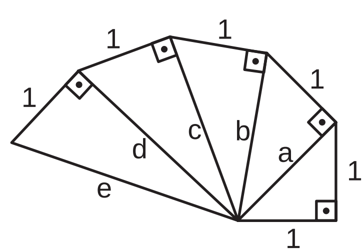
Sugestão: Desenhe um triângulo igual a **ABC**, chame-o **AB'C**, resultado de **ABC** refletido no "espelho" **AC**. Quanto medem os ângulos de **BB'C**? Que tipo de triângulo é **BB'C**? Quanto mede, então, **BC**?

b) Calcule o outro cateto.

Exercício 7

a) Encontre **a**, **b**, **c**, **d** e **e**.

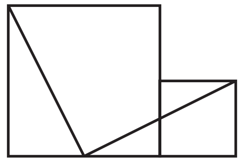
b) Complete a figura. Observe que os vértices dos ângulos retos formam uma espiral.



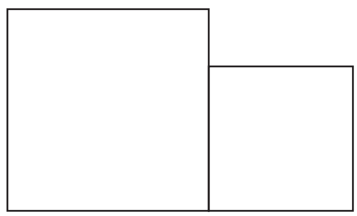
Exercício 8

Quebra-cabeça

Quaisquer dois quadrados, não importa seus tamanhos relativos, podem ser cortados em cinco peças que se juntarão novamente para formar um só quadrado maior. Os cortes estão ilustrados nos quadrados do exemplo abaixo.



Exemplo: Trace estes outros dois quadrados. Você sabe onde fazer os cortes de modo que depois sejamos capazes de remontar as peças num outro quadrado?



Exercício 9

O triângulo retângulo de lados com **3**, **4** e **5** cm, que conhecemos nesta aula, se tornou famoso devido ao fato de que seus lados são medidos por números naturais (i.e, inteiros positivos) pequenos. Este exercício apresenta outros triângulos desse tipo. Faça uma tabela como esta contendo na horizontal e na vertical os quadrados dos números naturais. Observe que cada número na tabela é soma de dois quadrados. Por exemplo **5 = 1 + 4**. Chamemo-los **b** e **c** .

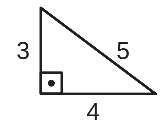
a) Procure pelos **b + c** que são eles próprios também quadrados, estando então na sequência **1 - 4 - 9 - 16 -** etc. Por exemplo, **9 + 16 = 25 = 5**

n →		1	2	3	4	5	
	n^2 →	1	4	9	16	25	
1	1	2	3	10	17	26	
2	4		8	13	20	29	
3	9			18	25	34	
4	16				32		

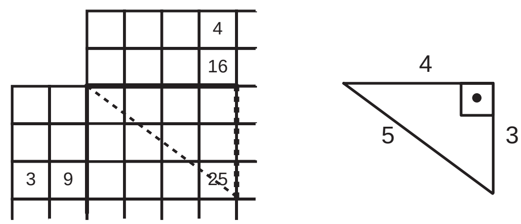
Sugestão: Para facilitar, use esta tabela de quadrados:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	215

b) Desenhe os triângulos que você encontrou
Exemplo:



Sugestão: Faça sua tabela em papel quadriculado. Voce perceberá que a própria tabela lhe dá o triângulo desenhado.
Exemplo:



c) Existem triângulos semelhantes entres os encontrados? Isto é, de mesmo formato mas de tamanhos diferentes?

Exercício 10

Inspirando-se no exercício da aula, prove que num triângulo retângulo de hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**, a altura relativa à hipotenusa mede $h = \frac{bc}{a}$