AULA

# 76

# Equacionando problemas - II

## Introdução

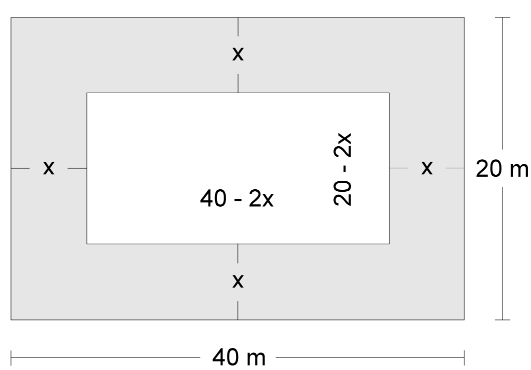
Nas duas últimas aulas, resolvemos diversas equações do 2º grau pelo processo de completar o quadrado perfeito ou pela utilização da fórmula de Bhaskara.

Na aula de hoje, resolveremos alguns problemas com o auxílio dessa fórmula.

## Nossa aula

Com a utilização da fórmula de Bhaskara $\left( = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$ podemos solucionar muitos problemas práticos.

Observe o exemplo: a prefeitura de uma cidade deseja cimentar o contorno de uma praça retangular de 40 m por 20 m. Para que a faixa a ser cimentada seja uniforme e a área interna da praça tenha 476 $m^2$, que largura deverá ter essa faixa?




A área interna da praça é:

$$(40 - 2x)(20 - 2x) = 476 \text{ m}^2$$

Desenvolvendo essa expressão, temos:

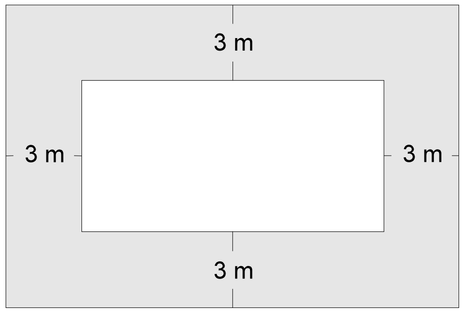
$$4x^2 - 120x + 324 = 0$$

$$x^2 - 30x + 81 = 0 \qquad \div 4$$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 324}}{2} = \frac{30 \pm 24}{2}$$

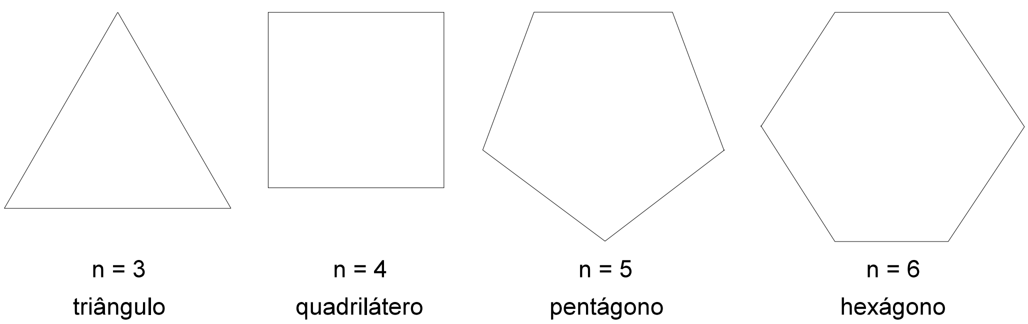
Como a faixa não pode ser maior que a própria praça, descartamos a raiz $x = 27$. Assim, a solução do problema deverá ser a raiz $x = 3$.

Isto significa que a faixa ao redor da praça deverá ter **3 m** de largura.

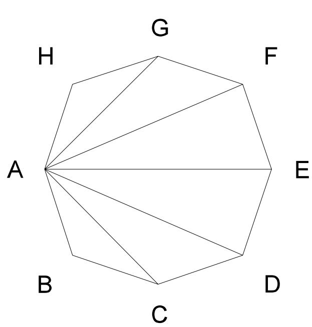



## O número de diagonais de um polígono

Um polígono tem **n** lados, sendo $n \geq 3$. Veja os exemplos:




De cada um dos vértices de um polígono saem **n - 3** diagonais.




Do vértice A desse octógono (polígono de 8 lados) saem 5 diagonais (8 - 3 = 5).

Como são **n** lados, temos $n(n - 3)$ diagonais. Entretanto, essa expressão deve ser dividida por 2, caso contrário uma mesma diagonal será contada duas vezes (a diagonal AC é a mesma diagonal CA).

Então, temos que o número de diagonais de um polígono é:

$$\boxed{D = \frac{n(n-3)}{2}}$$

Nessa expressão, **D** representa o número de diagonais e **n** o número de lados do polígono.

Assim, vemos que há uma relação entre o número de lados e o número de diagonais de um polígono.

Para descobrir todas as diagonais de um octógono, acompanhe o cálculo abaixo:

$n = 8$ ® $D = \dfrac{8(8 - 3)}{2} = \dfrac{8 . 5}{2} = 20$

Se quiser conferir o resultado, desenhe esse polígono e trace suas diagonais.

**EXEMPLO 1**

Qual é o polígono que tem 90 diagonais?

$D = \dfrac{n(n - 3)}{2}$ ® $90 = \dfrac{n(n - 3)}{2}$ ® $180 = n(n - 3)$ ®

® $180 = n^2 - 3n$ ® $n^2 - 3n - 180 = 0$

Aplicando a fórmula de Bhaskara para resolver a equação $n^2 - 3n - 180 = 0$, temos:

$(a = 1 \quad b = -3 \quad c = -180)$

$$n = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 . 1 . (-180)}}{2 . 1}$$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 720}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{3 \pm 27}{2}; \; n_1 = 15, \; n_2 = -12$$

Como as diagonais de um polígono são representadas por um número inteiro e positivo, abandonaremos a raiz $n = -12$.

Portanto, o polígono que tem 90 diagonais é o polígono de **15 lados**.

Verificando a solução, pela substituição da raiz, temos:

$$90 = \frac{15(15 - 3)}{2} \rightarrow 180 = 15 . 12 \rightarrow 180 = 180$$

**solução verdadeira**

## Existe polígono com 100 diagonais?

$$100 = \frac{n(n - 3)}{2} \rightarrow 200 = n(n - 3) \rightarrow 200 = n^2 - 3n \rightarrow n^2 - 3n - 200 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos:

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 800}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{809}}{2}$$

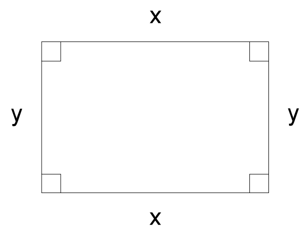
Como a $\sqrt{809}$ não é exata, as raízes da equação $n^2 - 3n - 200 = 0$ não podem ser valores inteiros. Nesse caso, concluímos que **não existe** polígono com 100 diagonais.

Observe que a equação $n^2 - 3n - 200 = 0$ possui duas raízes reais. No entanto, nenhuma delas satisfaz a solução do problema. Muitas vezes não basta resolver a equação, pois é preciso analisar a solução encontrada.

## Áreas e perímetros

Conhecendo a área e o perímetro de um retângulo, é possível calcular suas dimensões.

Quais as dimensões de um retângulo que têm 18 cm de perímetro e 20 $cm^2$ de área?




Área: $x \cdot y = 20$
Perímetro: $2x + 2y = 18$

De acordo com as dimensões x e y da figura, devemos encontrar os valores x e y que satisfaçam as duas equações.

Simplificando a 2ª equação, temos:

$$2x + 2y = 18 \quad \rightarrow \quad x + y = 9 \quad \rightarrow \quad x = 9 - y$$

Substituindo $x = 9 - y$ na 1ª equação:

$$x \cdot y = 20 \quad \rightarrow \quad (9 - y) \cdot y = 20 \quad \rightarrow \quad 9y - y^2 = 20$$

Assim, temos a equação do 2º grau: $y^2 - 9y + 20 = 0$

Aplicando a fórmula de Bhaskara:

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} \begin{cases} \nearrow y = 5 \\ \searrow y = -4 \end{cases}$$

Desconsiderando o valor $y = -4$, temos que:

$$y = 5 \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad x = 9 - 5 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 4}$$

Portanto, as dimensões desse retângulo são 5 cm e 4 cm.

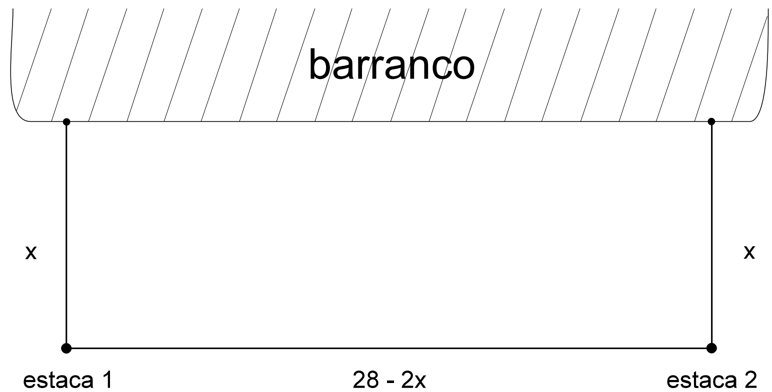
Verificando a solução, pela substituição das raízes, temos:

$5 \cdot 4 = 20 \quad \rightarrow$ **20 = 20 (solução verdadeira)**

$2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18 \quad \rightarrow \quad 10 + 8 = 18 \quad \rightarrow$ **18 = 18 (solução verdadeira)**

## Na vida real

Seu Pedro deseja cercar o terreno onde vai construir sua casa. Para tanto, ele pretende aproveitar um barranco e cercar os outros 3 lados, de forma a obter um retângulo. Como a área do terreno é de 96 $m^2$ e ele dispõe de um rolo de 28 m de tela, a que distância do barranco deverão ser colocadas as estacas 1 e 2?



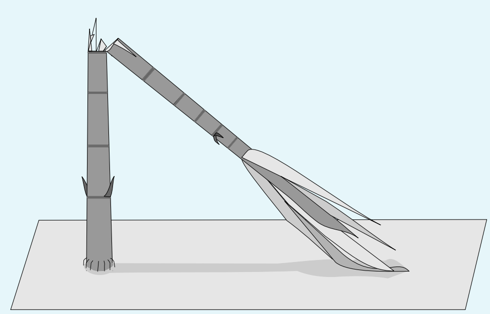

Área = 96 $\rightarrow$ x (28 - 2x) = 96
$28x - 2x^2 = 96$ $\rightarrow$ $2x^2 - 28x + 96 = 0$
Resolvendo essa equação, temos: **x = 8**
Portanto, seu Pedro deverá colocar as estacas a 8m do barranco.

**Curiosidade**

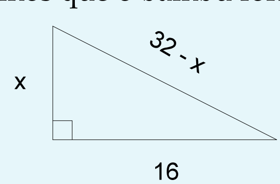
Um bambu de 32 côvados, erguendo-se verticalmente sobre um terreno horizontal, é quebrado num certo ponto pela força do vento.

Sabendo que sua extremidade tocou a terra a 16 côvados do seu pé, responda: a quantos côvados do seu pé estava o ponto em que o bambu foi atingido pela força do vento?

Observação: côvado é uma unidade de medida de comprimento usada na Antigüidade.



Observando a figura, vimos que o bambu forma com o chão um triângulo retângulo.



Aplicando o Teorema de Pitágoras e desenvolvendo o produto notável, temos:

$$(32 - x)^2 = x^2 + 16^2$$

$$1024 - 64x + x^2 = x^2 + 256$$

$$- 64x = - 768$$

$$\mathbf{x = 12}$$

Portanto, o ponto em que o bambu foi atingido pela força do vento estava a 12 côvados do pé. O problema apresentando acima foi enunciado pelos chineses em 2600 a.C.. No entanto, foi reescrito por Bhaskara no século XII.



## Exercícios

**Exercício 1**

De acordo com a expressão $D = \frac{n(n - 3)}{2}$, diga qual o polígono que possui:

**a)** 35 diagonais
**b)** 54 diagonais
**c)** 170 diagonais

**Exercício 2**

Quais as dimensões de um retângulo que tem 30 cm de perímetro e 50 $cm^2$ de área?

**Exercício 3**

Ao cercar um terreno retangular, dando três voltas completas, uma pessoa gastou 180 m de arame. Quais as dimensões desse retângulo, sabendo que o comprimento é o dobro da altura.

**Exercício 4**

Sabendo que a soma de dois números é 37 e seu produto é 300, descubra quais são esses números.

**Exercício 5**

Equacione o texto abaixo e resolva:

*"Estavam os pássaros*
*divididos em dois grupos:*
*enquanto o quadrado da oitava parte*
*se divertia cantando sobre as árvores,*
*outros doze sobrevoavam*
*o campo também cantando alegremente."*

Quantos pássaros havia no total?