A

Veja que a velocidade do Copa variou de **0 a 30 m/s** e a velocidade do Duna variou de **0 a 20 m/s nos mesmos 10 segundos!**

Você já sabe qual é a velocidade de cada veículo após 10 segundos, mas...

O que ocorre com a velocidade a cada instante?

TABELA 3			
COPA		DUNA	
v (m/s)	t (s)	v (m/s)	t (s)
0	0	0	0
6	2	4	2
12	4	8	4
18	6	12	6
24	8	16	8
30	10	20	20

A Tabela 3 indica, para alguns instantes, o valor da **velocidade** marcada pelo velocímetro. Observe que, à medida que o tempo passa, a velocidade varia para ambos os veículos.

Observe que num mesmo instante, a velocidade do Copa é **maior** do que a do Duna. Pode-se dizer que o Copa é melhor, porque "arranca" mais rápido.

Uma nova grandeza física

Quando falamos em "arranque", na verdade estamos nos referindo à relação entre duas grandezas: **variação da velocidade** e **tempo**. Essa nova grandeza, que nos ajudou a decidir qual dos dois é o melhor é uma grandeza física e recebe o nome de **aceleração**.

Aceleração é uma medida da variação da velocidade de um corpo num certo intervalo de tempo.

Esse é o **conceito de aceleração**. Pode-se também definir aceleração com a ajuda da Matemática. Como calcular a aceleração?

Pegue, na Tabela 3, o valor da velocidade em dois instantes quaisquer e calcule inicialmente a variação da velocidade (Δv), isto é, a diferença entre as duas e o intervalo de tempo correspondente (Δt). Por exemplo, para o Copa:

$$t_1 = 2s \quad e \quad v_1 = 6\ m/s \qquad \Rightarrow \qquad \Delta v = v_2 - v_1 = 24 - 6 = 18$$
$$t_2 = 8s \quad e \quad v_2 = 24\ m/s \qquad\qquad \Delta t = t_2 - t_1 = 8 - 2 = 6$$

Para calcular a aceleração, basta dividir essa variação pelo intervalo de tempo necessário para que ela ocorra. Definimos:

$$\boxed{\text{Aceleração} \Rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

Assim teremos:

$$a = \frac{18}{6} = 3(?)$$

Qual a unidade usada para a grandeza **aceleração**?

Uma unidade para a aceleração

Veja que a grandeza aceleração vem da combinação de duas outras grandezas: **velocidade** e **tempo**, portanto a sua unidade é obtida a partir das unidades dessas duas grandezas. Observe que a velocidade do Duna varia "dois metros por segundo" a cada "segundo", assim teremos "metro por segundo por segundo", abreviando $m/s \cdot s$ ou m/s^2.

De forma geral, a unidade da aceleração é dada por uma unidade de comprimento dividida por uma unidade de tempo ao quadrado.

Portanto, a aceleração do Copa é 3 m/s^2. **Lembre-se**: uma grandeza física deve sempre vir acompanhada de sua unidade (Aula 2).

Nesse caso, se você calcular a aceleração para dois instantes de tempo **quaisquer** irá obter **sempre o mesmo valor**. Isso quer dizer que **a aceleração não varia**. Podemos concluir que:

Nesse movimento a aceleração é constante.

Verifique essa afirmação calculando a aceleração para quatro intervalos de tempo diferentes para o Copa e quatro para o Duna.

Outra maneira de representar um conjunto de dados

Os dados da Tabela 3 podem ser representados por um gráfico, basta marcar os valores de **v** e **t**, isto é, v_1 e t_1, v_2 e t_2, v_3 e t_3, v_4 e t_4, v_5 e t_5 e uni-los com uma reta:

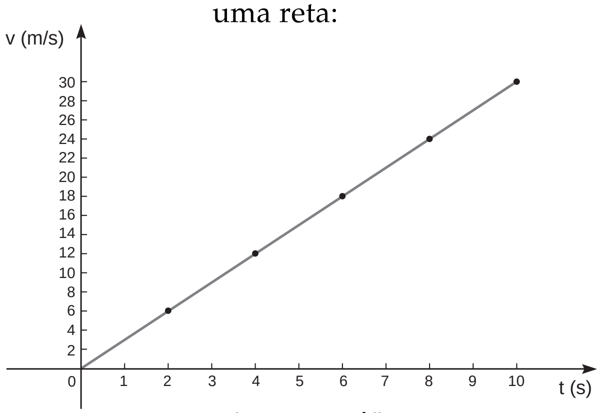


Figura 1. Gráficos v X t para o Copa (à esquerda) e para o Duna (à direita).

Você viu como calcular a aceleração a partir dos dados da Tabela 3. Viu que, com esses mesmos dados, foi construído o gráfico da Figura 1. Portanto o gráfico e a tabela **representam o mesmo conjunto de dados**. Logo, deve ser possível obter o valor da aceleração a partir do gráfico. Agora, observe o gráfico da Figura 2, que mostra a velocidade do Duna em função do tempo.

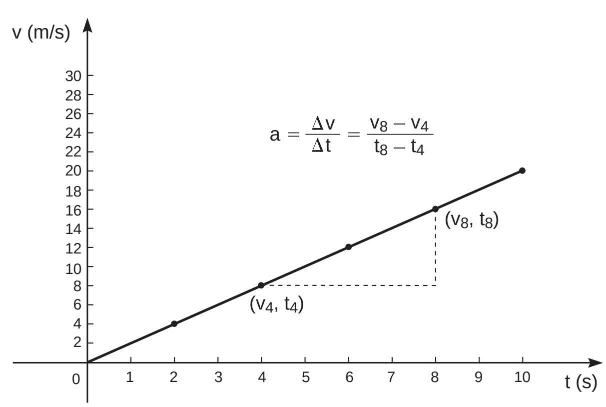


Figura 2. Gráfico v X t para o Duna.

Tome dois pontos, por exemplo os pontos (v_4 e t_4) e (v_8 e t_8).

Pela definição, a aceleração é obtida dividindo-se a variação da velocidade (representada pela linha pontilhada vertical) pelo intervalo de tempo (representado pela linha pontilhada horizontal). Assim teremos:

$$a = \frac{16 - 8}{8 - 4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ m/s}^2$$

Observe o gráfico da Figura 3; nele estão representadas as retas que descrevem as velocidades do Copa e do Duna em função do tempo.

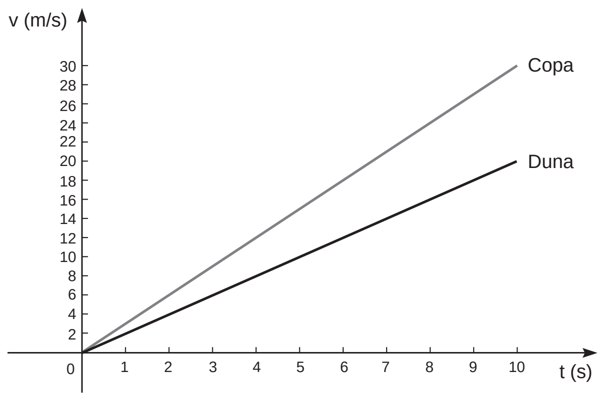


Figura 3. Gráfico de v X t do Copa e do Duna.

Observe que a reta que representa o movimento do Copa é mais inclinada, e lembre-se de que ele tem maior aceleração. Portanto, pode-se afirmar que:

Num gráfico de velocidade em função do tempo v X t (que se lê "v versus t"), quanto maior for a aceleração mais inclinada será a reta que representa o movimento.

Prevendo resultados

TABELA 4	
v (m/s)	t (s)
$v_0 = 3$	$t_0 = 0$
$v_1 = 6$	$t_1 = 1$
$v_2 = 9$	$t_2 = 2$
$v_3 = 12$	$t_3 = 3$
$v_4 = 15$	$t_4 = 4$

Será possível conhecer a velocidade dos veículos em outros instantes, por exemplo, quando t = 9 segundos?

A resposta é sim! Mas como? Veja: num certo momento, o co-piloto do Copa decidiu anotar os valores da velocidade, porém, o veículo **já estava em movimento naquele instante**. Observe na Tabela 4 os dados que ele anotou.

Você já conhece duas maneiras de representar um conjunto de dados: através de tabelas e de gráficos; mas existe outra!

Vamos calcular outra vez a aceleração do Copa, agora escolhendo o par (v_4, t_4) da tabela 4 e um par (v,t) qualquer:

$t_4 = 4\text{s}$ e $v_4 = 15$ m/s
t e v

Podemos escrever: $a = \dfrac{v - 15}{t - 4}$

Sabemos que a aceleração do Copa é 3 m/s², assim:

$$3 = \frac{v - 15}{t - 4}$$

ou seja, $v - 15 = 3\,(t - 4)$

$v - 15 = 3 \cdot t - 12$

então: $\boxed{v = 3 + 3 \cdot t}$

Essa função matemática fornece o valor da velocidade em função do tempo. Ela é chamada de **função horária da velocidade** que descreve o movimento do copa, que recebe o nome de Movimento Retílineo Uniformemente Variado (MRUV). Retilíneo, pois o veículo anda em linha reta; variado, pois sua velocidade varia; e uniformemente vem do fato de a aceleração ter sempre o mesmo valor e, portanto, a velocidade varia sempre da mesma forma(uniforme).

Note que, para o instante t = 0s, obtém-se $v_0 = 3$ m/s; e, se você observar a Tabela 4, verá que essa é a velocidade inicial, isto é, no instante em que o co-piloto iniciou as anotações!

De uma maneira geral, podemos escrever para a velocidade **v** num instante **t** qualquer:

$$\boxed{\mathbf{v = v_0 + a \cdot t}}$$

onde $\mathbf{v_0}$ é a velocidade inicial (em t=0) e **a** é a aceleração, que é constante.

Agora é possível responder qual o valor da velocidade quando t = 9 s! É só substituir o tempo na função horária da velocidade:

$$v_9 = 3 + 3 \cdot 9 = 3 + 27 = 30 \text{ m/s}$$

Como saber onde o veículo estará num certo instante?

Na aula passada, você estudou o Movimento Retilíneo Uniforme (MRU), caso em que a velocidade não varia, ela é constante. Para descrever o MRU você estudou apenas como varia a **posição** em função do tempo.

Nesta aula você está estudando um movimento em que, além de a posição variar, varia também a velocidade.

Mas como varia a **posição no MRUV**? É claro que ela varia, pois esse fato caracteriza um estado de movimento!

Você é capaz de se lembrar como foi calculado o deslocamento do carro no MRU?

Foi pelo gráfico da velocidade em função do tempo (v X t): a área da figura formada pelo gráfico fornece o deslocamento.

Pode-se fazer de forma semelhante para o caso do MRUV. O quadro, no final da aula, indica, passo a passo, como obter a função horária da posição do MRUV:

$$\boxed{\mathbf{x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2}}$$

onde $\mathbf{x_0}$ é a posição inicial, $\mathbf{v_0}$ é a velocidade inicial, e **a** é a aceleração.

Nesse caso, como será o gráfico da posição em função do tempo? Você espera que seja uma reta como no MRU?

Note que essa função é diferente daquela obtida para a velocidade: ela contém uma terceira parcela proporcional ao quadrado do tempo (t^2). Isso faz com que o gráfico não seja mais uma reta, mas uma curva.

Para construir o gráfico de posição (x) por tempo (t) a partir da função é útil, inicialmente, fazer uma tabela que indique os valores de x e **t**. Para encontrar as posições, basta substituir o tempo na função e calcular o valor de x!

Mas é preciso também conhecer o valor de x_0 e v_0.

Tome, por exemplo, a Tabela 4. No instante inicial, isto é, quando começam a anotar os valores de **v**, a velocidade era 3 m/s; portanto, $v_0 = 3$ m/s. Suponha que nesse instante o carro passou pelo marco 100 m da pista. Portanto, $x_0 = 100$ m. Lembre-se de que a aceleração do Copa, nesse exemplo é a=3 m/s^2.

Substituindo esses valores na função horária da posição temos:

$$\boxed{x = 100 + 3 \cdot t + 1{,}5 \cdot t^2}$$

Essa função descreve o **movimento do Copa** e fornece sua posição **x** em qualquer instante de tempo **t**.

Como exemplo, vamos calcular a posição no instante t = 2 s.

$$x = 100 + 3 \cdot 2 + 1{,}5 \cdot 2^2$$
$$x = 100 + 6 + 6 = 112 \text{ m}$$

Prosseguindo dessa maneira, é possível obter os outros valores e montar a Tabela 6:

TABELA 6

v (m/s)	t (s)
$x_0 = 100$	$t_0 = 0$
$x_1 = 104{,}5$	$t_1 = 1$
$x_2 = 112$	$t_2 = 2$
$x_3 = 122{,}5$	$t_3 = 3$
$x_4 = 136$	$t_4 = 4$
$x_5 = 152{,}5$	$t_5 = 5$

Agora é possível construir o gráfico da posição em função do tempo:

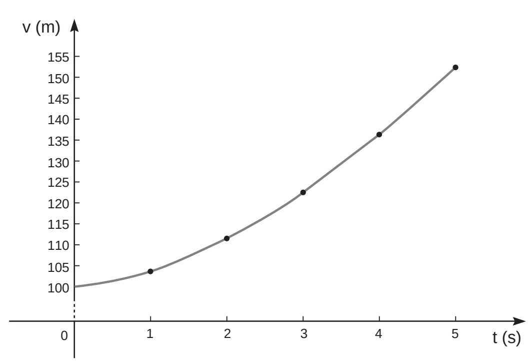


Figura 4

Observe que não se obtém mais uma reta: o gráfico é uma curva, que tem o nome de **parábola.**

É possível também representar as posições do veículo por intermédio de um eixo orientado, (lembre-se da Aula 3).

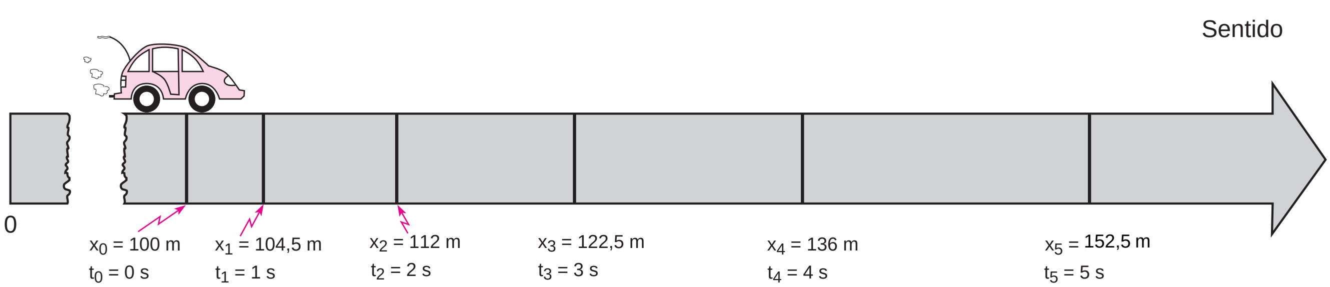


Figura 5

Observe na Figura 5 que, nesse caso, os deslocamentos aumentam com o tempo: a cada segundo o deslocamento é maior do que no instante anterior. Isso indica que a velocidade está aumentando: o movimento é variado, nesse caso dizemos que ele é **acelerado**.

Breeeeeca!

TABELA 5

v (m/s)	t (s)
$v_0 = 30$	$t_0 = 0$
$v_1 = 25$	$t_1 = 1$
$v_2 = 20$	$t_2 = 2$
$v_3 = 15$	$t_3 = 3$
$v_4 = 10$	$t_4 = 4$
$v_5 = 5$	$t_5 = 5$
$v_6 = 0$	$t_6 = 6$

No meio da pista havia um cachorro, havia um cachorro no meio do pista! De repente o piloto do Copa avistou o animal e rapidamente acionou os freios. Sem perder tempo, o seu co-piloto anotou os valores da velocidade:

Note que a velocidade agora está **diminuindo**: o veículo está freando!

Qual será agora o valor da aceleração nesse caso? Pegue, por exemplo:

$$t_1 = 1\ \text{s} \ \text{ e } v_1 = 25\ \text{m/s}$$
$$t_4 = 4\ \text{s e } v_4 = 10\ \text{m/s}$$

Calculando a aceleração:

$$a = \frac{v_4 - v_1}{t_4 - t_1} = \frac{10 - 25}{4 - 1} \qquad \text{então: } a = -5\ \text{m/s}^2$$

Observe que o valor da aceleração é negativo! O sinal da aceleração é oposto ao da velocidade (que é positiva). Isso indica que o movimento é **desacelerado**, isto é, o carro está freando.Observe o gráfico v X t nesse caso:

Veja que a reta tem uma inclinação diferente do caso em que o movimento é acelerado quando a velocidade cresce.

Abaixo estão representados os gráficos v X t para os três casos; quando o movimento é **acelerado** ($a > 0$); quando é **desacelerado** ($a < 0$), ambos exemplos de Movimento Retilíneo Uniformemente Variado e; no caso especial, quando a aceleração é nula ($a = 0$): nesse caso, a velocidade não varia e temos um exemplo de Movimento Retilíneo Uniforme – MRU (Aula 3).

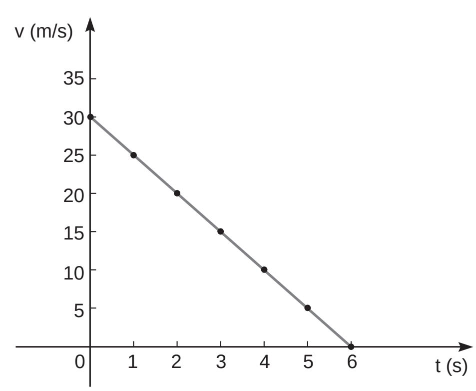
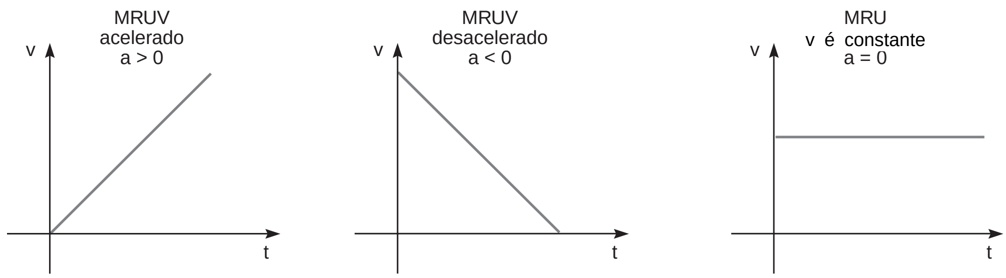


Figura 6



(a) MRUV acelerado; (b) MRUV desacelerado; (c) MRU.

Figura 7

DEDUÇÃO DA FUNÇÃO HORÁRIA DA POSIÇÃO DO MRUV

Imagine que num certo instante, após a largada, o co-piloto do Copa decide anotar alguns valores da velocidade. Olha para o velocímetro e verifica que naquele instante a velocidade do veículo é 6 m/s; assim, essa é a sua "velocidade inicial". Anota os dados:

t (s)	v (m/s)
0	6
1	9
2	12
3	15
4	18
5	21

Observe que
Quando começou a anotar os valores de v o carro já estava em movimento, portanto, v_0 não é zero! Com esses dados constrói-se o gráfico (Figura 8):

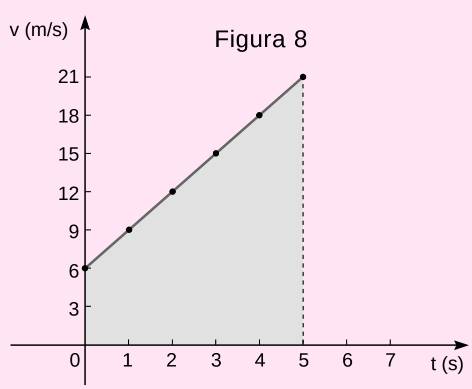


Figura 8

Para se calcular a distância percorrida pelo carro, basta calcular a área da figura, que é um trapézio! Ela pode ser pensada como "um triângulo e um retângulo"! Assim fica fácil calcular a área!

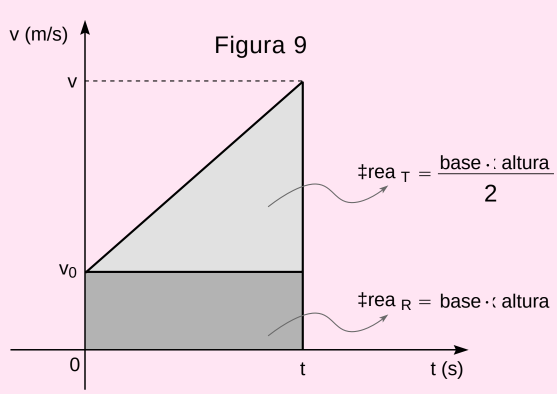


Figura 9

A base do retângulo corresponde ao intervalo de tempo Δt e a altura corresponde a v_0 . Portanto, a área será:

$$\text{área}_R = \text{base} \cdot \text{altura} = \Delta t \cdot v_0$$

$$\text{área}_R = v_0 \cdot t$$

pois foi escolhido $t_0 = 0s$.

O triângulo tem base Δt e altura Δv, que é a velocidade final menos a velocidade inicial naquele trecho. Portanto, a área do triângulo será:

$$\text{área}_T = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\Delta v \times \Delta t}{2}$$

usando a definição de aceleração

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{ou } \Delta v = a\ \Delta t$$

$$\text{área}_T = \frac{a \times \Delta t \times \Delta t}{2}$$

Lembrando que $t_0 = 0$ (portanto, $\Delta t = t$) e que $v(t_0) = v_0$, pode-se escrever a área do triângulo como:

$$\text{área}_T = \frac{a \times t^2}{2}$$

E a área do trapézio, que é a soma das duas será:

$$\text{área}_{\text{total}} = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}\ a \cdot t^2$$

Como a área representa o deslocamento $(x_0 - x)$, finalmente obtém-se:

$$\boxed{x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}\ a \cdot t^2}$$

A expressão matemática que acabamos de obter permite conhecer a posição **x** num instante **t** qualquer, desde que se conheçam a posição inicial (x_0), a velocidade inicial (v_0) e a aceleração (a).

PARA TERMINAR

Nesta aula você aprendeu que:

- existe uma grandeza física, a **aceleração**, que relaciona mudança de velocidade e tempo, e que, como todas as grandezas físicas, possui uma unidade;
- além do Movimento Retilíneo Uniforme (MRU), onde a velocidade se mantém constante, existe um outro tipo de movimento, Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV), no qual a velocidade varia, porém de maneira uniforme, o que implica que a **aceleração é constante**;
- a aceleração pode ser definida matematicamente;
- existem funções matemáticas para descrever esse movimento que permitem prever posições e velocidades em qualquer instante;
- que tabelas, gráficos e funções são diferentes maneiras de se representar um conjunto de dados, como posições e velocidades em função do tempo;
- se obtém a aceleração a partir da tabela (v,t) e por meio do gráfico (vXt).

Exercício 1

Nesta aula você deve ter calculado alguns valores da aceleração e verificou que ela é constante. Como é o gráfico da aceleração em função do tempo?

Exercício 2

As posições de um trem, que percorre uma estrada reta, variam de acordo com a função: $x = 100 + 20\ t + 2\ t^2$

onde as posições são dadas em metros e o tempo em segundos, responda, sem se esquecer das unidades:

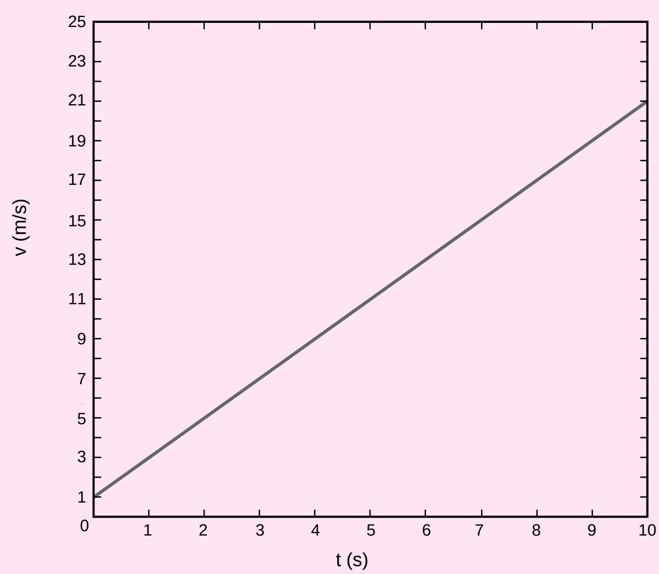
a) Qual a posição inicial do trem, isto é, onde ele se encontrava quando t = 0 s?
b) Qual é a velocidade inicial do trem?
c) Qual é o valor da sua aceleração?
d) Em que posição deverá estar no instante t = 4 s?

Exercício 3

Para o trem do Exercício 2, escreva a equação horária da velocidade e verifique qual a velocidade do trem no instante t = 5 s.

Exercício 4

É dado o gráfico da velocidade em função do tempo de um ciclista que se move em linha reta.



Responda:

a) A velocidade do ciclista é constante? Qual o tipo de movimento que ele realiza?
b) Qual a velocidade inicial do ciclista?
c) Qual o valor da sua aceleração?
d) Escreva a função horária da velocidade que representa este movimento.

Exercício 5

Suponha que o ciclista do exercício 4 se encontre inicialmente (t = 0) no marco 100 m de uma pista. Pede-se:

a) A função horária da posição.
b) Qual a posição do ciclista no instante t = 5 s?